Dossier n°39 : Exemples de démonstrations utilisant les aires. Cas des démonstrations classique : théorème de Pythagore, théorème de Thalès…

Cécile COURTOIS, 12 avril 2003

I Situation par rapport aux programmes.

Les aires des configurations classiques sont introduites dans les classes de collège.

Par ailleurs, en classe de seconde, les élèves étudient les triangles semblables et les triangles isométriques et par suite les démonstrations utilisant les aires.

Je choisis donc de situer ce dossier au niveau de la classe de seconde.

II Commentaires généraux.

Le but de ce dossier est de réinvestir les connaissances des élèves sur les configurations planes et leurs aires dans des démonstration de propriétés connues ou inconnues des élèves.

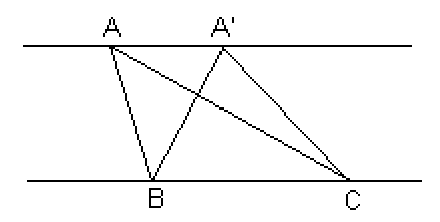
En particulier, en classe de seconde, les élèves étudient les triangles et leurs aires.

L'étude des triangles isométriques permet d'obtenir la propriété suivante :

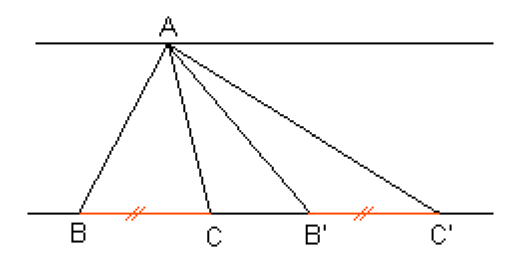
Deux triangles isométriques ont même aire.

On dégage également les différents cas d'égalité d'aire pour des triangles :

- **Deux triangles ayant même base et les sommets opposés sur une parallèle à la base ont même aire**.



- **Deux triangles ayant même sommet A et les bases sur une même droite et de même longueur ont même aire**.



- **La médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire** (c'est un cas particulier du cas précédent).

Il est également nécessaire de connaître quelques formules d'aires usuelles, notamment :

- L'aire d'un triangle : $\mathcal{A} = \frac{B \times h}{2}$;
- L'aire d'un carré de côté a : $\mathcal{A} = a^2$

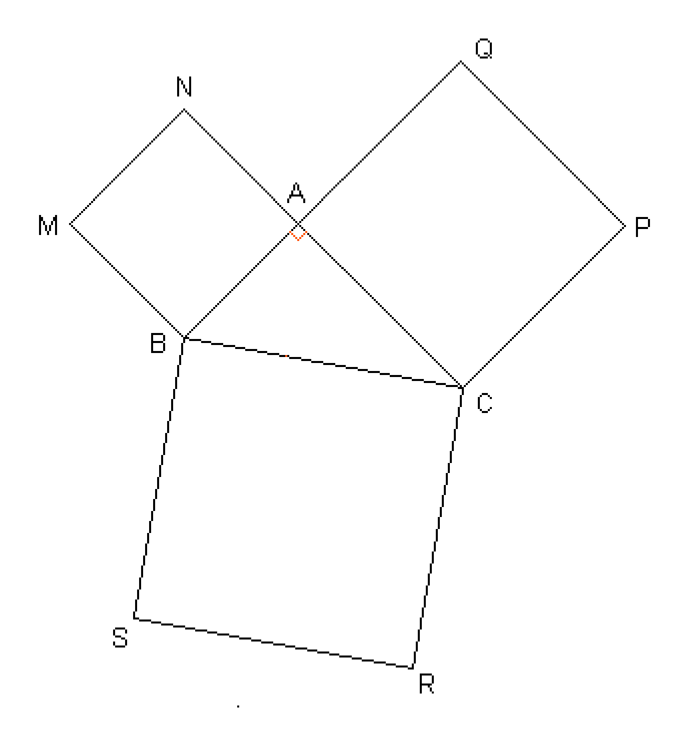
Les trois exercices que j'ai choisi de présenter proposent des démonstrations utilisant les aires de propriétés connues dans le triangle :

- Le théorème de Pythagore ;
- Le théorème de Thalès ;
- La position du centre de gravité sur les médianes.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

<u>But</u> : Montrer le théorème de Pythagore avec des aires.



<u>Méthode</u> : Introduire trois carrés portés par les côtés d'un triangle rectangle et traduire la propriété de Pythagore en termes d'aires de carré.

<u>Outils</u> :

- Aire d'un triangle, aire d'un carré ;
- Cas des triangles de même aire n°1 ;
- Deuxième cas d'isométrie de triangles ;
- Deux triangles isométriques ont même aire.

III.2 Exercice n°2.

<u>But</u> : Montrer le théorème de Thalès avec des aires.

<u>Méthode</u> : Exprimer des rapports d'aires dans une configuration de Thalès et établir que : « le rapport des aires est égal au rapport des bases » pour deux triangles de même hauteur.

<u>Outils</u> :

- Aire d'un triangle ;
- Cas des triangles de même aire n°1.

III.3 Exercice n°3.

<u>But</u> : Montrer que le centre de gravité G d'un triangle ABC est le point de la médiane [AI] tel que AG = 2GI avec les aires.

<u>Méthode</u> : Comparer es aires de divers triangles formés par les médianes de ABC.

<u>Outils</u> :

- Cas des triangles de même aire n°2 ;
- Aire d'un triangle.

IV Enoncés des exercices

IV.1 Exercice n°1 (n°78 page 245, Terracher Seconde 2000).

Soit ABC un triangle rectangle en A. on construit extérieurement au triangle les carrés ABMN, ACPQ et BCRS. On propose de démontrer la propriété de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

c'est à dire :

$$\text{aire(BCRS)} = \text{aire(ACPQ)} + \text{aire(ABMN)}$$

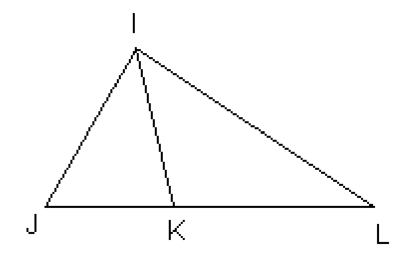
La hauteur issue de A dans le triangle ABC rencontre [BC] en I et [SR] en J.

1) Montrer que aire(ACPQ) = 2aire(BCP) et aire(CIJR) = 2aire(ACR). Comparer les triangles ACR et BCP et en déduire que aire(CIJR) = aire(ACPQ).
2) Etablir de la même manière que aire(BIJS) = aire(ABMN).
3) Conclure.

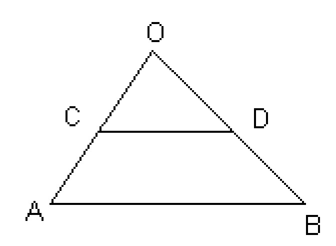
IV.2 Exercice n°2 (n°81 page 245, Terracher Seconde 2000).

On se propose de démontrer le théorème de Thalès par le calcul d'aires.

1) Montrer que pour deux triangles de même hauteur tels que IJK et IJL, le rapport des aires est égale au rapport des bases c'est à dire $\frac{\text{aire(IJL)}}{\text{aire(IJK)}} = \frac{JL}{JK}$.



2) On considère une configuration de Thalès OAB et OCD avec (AB) // (CD).



a) Montrer que les triangles ACD et BCD ont même aire.
b) En déduire que aire(OAD) = aire(OCB).
c) Montrer à l'aide de 1) que $\frac{\text{aire(OCD)}}{\text{aire(OAD)}} = \frac{OC}{OA}$ et $\frac{\text{aire(OCD)}}{\text{aire(OCB)}} = \frac{OD}{OB}$.
d) Comparer les rapports $\frac{OC}{OA}$ et $\frac{OD}{OB}$ et conclure.

IV.3 Exercice n°3 (TD n°4 page 273, Belin Seconde 2000).

Soit ABC un triangle et soit [AI] la médiane issue de A.

1) Montrer que les triangles ABI et AIC ont même aire.
2) On trace une seconde médiane [BJ].
   a) Montrer que les triangles AIC et BJC ont même aire.

b) En déduire que les triangles AGJ et BGI ont même aire avec G centre de gravité de ABC.

3) On trace le segment [GC].
   a) Démontrer que les quatre triangles BGI, GIC, CGJ et JGA ont même aire.
   b) En déduire que l'aire du triangle AGC est le double de l'aire du triangle GIC.
4) Soit h la longueur de la hauteur [CH] issue de C du triangle GIC.
   a) Calculer les aires des triangles AGC et GIC en fonction des longueurs AG, GI et h.
   b) En déduire que AG = 2GI. Quel résultat connu vient-on de montrer ?